ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE COMPIEGNE
Etablissement d'enseignement supérieur privé soutenu par la Chambre de Commerce et d'Industrie de l'Oise
6, avenue Thiers - 60200 Compiègne - tél 44 40 29 32

CONCOURS D'ADMISSION 1987

MATHEMATIQUES I

Mercredi 3 Juin 1987 de 8H00 à 12H00

Option : Générale

Coefficient : - Générale 4

PROBLEME I

NOTATIONS :

$\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre m, ($m \geqslant 2$), à coefficients réels.

I_m est la matrice identité,

O_m la matrice nulle.

Pour $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et $M \neq O_m$,

on note $M^0 = I_m$, $M^1 = M$ et pour $n \geqslant 1$ $M^n = M^{n-1} . M$

Le déterminant de la matrice M est notée $|M|$

$a \in \mathbb{R}^*$, la matrice A_m est définie par sa carte,

et le déterminant Δ_m est défini par sa carte :

$$A_m = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & a & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

(m lignes, m colonnes)

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \quad a \end{vmatrix}$$

(m lignes, m colonnes)

PARTIE 1

1°- Calculer Δ_2 et Δ_3 en fonction de a.

2°- Calculer Δ_m en fonction de a et m.

3°- Peut-on écrire Δ_1 et Δ_0 ?

PARTIE 2

1°- Exprimer $|A_m|$ en fonction de a, Δ_{m-1} et Δ_{m-2}.

2°- En déduire l'expression de $|A_m|$ en fonction de a et m.

PARTIE 3

1°- Donner l'expression du polynôme caractéristique $P(\lambda)$ de A_m.

2°- Donner les valeurs propres de A_m et leur ordre de multiplicité.

3°- Déterminer les sous-espaces vectoriels propres associés. On donnera pour chacun une base de vecteurs propres.

4°- Pour quelles valeurs de m, A_m est-elle diagonalisable ?

PARTIE 4

Dans cette partie $m \in \{2, 3, 4\}$

1°- A_m est-elle diagonalisable ?

2°- Donner les valeurs propres de A_m.

3°- Déterminer les équations des sous-espaces vectoriels propres associés. On donnera une base de vecteurs propres.

4°- Dans les cas où A_m est diagonalisable, déduire l'expression de A_m^n pour $n \in \mathbb{N}$.

PARTIE 5

Dans cette partie, m = 4

On pose $M = A_4 - a . I_4$

1°- Calculer M^2 , M^3 , M^4 , M^5 et M^6.

2°- Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$

3°- En déduire l'expression de A_4^n en fonction de :

a , n , A_4, A_4^2 , A_4^3 , et I_4.

Tournez la page S. V. P.

PARTIE 6 Vérification

Dans le cas particulier où m = 4 et a = 1 montrer que :

$$A_4^n = (2^{n-1} - 1)\, A_4^3 - (2^n - 2)\, A_4^2 + (n + 2^{n-1} - 1)\, A_4 - (n - 1)\, I_4.$$

PROBLEME II

n est un entier naturel, t un réel supérieur ou égal à 1.

On pose : $f_n(t) = t^{n+2} \cdot e^{-t}$.

1°- Pour $n \geqslant 1$, étudier les variations de $f_n(t)$ et démontrer que :

pour $t_n \in [1, +\infty[$ vérifiant $f'_n(t_n) = 0$

on a: $f_n(t_n) > 1$

($f'_n(t)$ est la dérivée de $f_n(t)$).

2°- Pour $n \geqslant 1$, en étudiant la restriction de f_n à $]n+2, +\infty[$

démontrer la proposition suivante :

Il existe un réel A_n unique tel que :

P(1) $\begin{cases} * \; A_n > n + 2 \\ * \; f_n(A_n) = 1 \\ * \text{ pour } t \in]A_n, +\infty[, \text{ on a } : t^n \cdot e^{-t} < \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$

3°- Etudier le cas particulier n = 0 et démontrer que pour

$t \in [1, +\infty[$ on a $f_0(t) \in]0,1[$

En déduire que A_0 vérifiant la proposition P(1) n'existe pas.

Que devient la formulation de cette proposition si on pose $A_0 = 3$?

Dans toute la suite du problème :

$A_0 = 3$ et pour $n \geqslant 1$, A_n est caractérisé par la proposition P(1)

x est une variable réelle, $x \geqslant A_n$

$$J_n(x) = \int_{A_n}^{x} t^n \cdot e^{-t} \, dt$$

4°- Démontrer que J_n est une fonction croissante de x.

5°- Démontrer que $0 \leqslant J_n(x) < \dfrac{1}{n+2}$

6°- En déduire que la limite de $J_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$ existe

et que l'écriture : $\int_{A_n}^{+\infty} t^n \cdot e^{-t} \cdot dt$ a un sens.

On considère l'intégrale :

$$I_n = \int_1^{+\infty} t^n \cdot e^{-t} \cdot dt \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

7°- Démontrer que I_n est convergente

8°- calculer I_0.

9°- Par une intégration par parties, déterminer entre I_n et I_{n-1} une

relation de récurrence. ($n \geqslant 1$)

10°- Donner l'expression de I_n en fonction de n

11°- Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} \left(\dfrac{I_n}{n!} \right) = 1 + e^{-1}$.

* * *

Suite ⟶